Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (1—2), 1967, pp. 235—241.

ÜBER DIE STARKE MULTIPLIKATION VON GEORDNETEN GRAPHEN

Von

L. LOVÁSZ (Budapest)

(*Vorgelegt von* P. ERDŐS)

1.

In den letzten Jahren behandelten mehrere Autoren die direkte Multiplikation von Graphen und untersuchten die Eigenschaften dieser Operation auf Grund verschiedener Definitionen ([1], [2] und [3]). Im Artikel [2] von G. SABIDUSSI wurde bezugs der sog. Descartesschen Multiplikation bewiesen, daß jeder gewissen Endlichkeitsbedingungen genügende Graph eindeutig als Produkt irreduzibler Faktoren darstellbar ist. Der Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist der — ebenfalls in [2] eingeführte — Begriff der *starken Multiplikation*, u.zw. wird das starke Produkt solcher endlichen Graphen untersucht, deren Punkte linear geordnet sind. Es wird gezeigt, dass die geordneten Graphen „im wesentlichen" eindeutig als Produkt irreduzibler Faktoren darstellbar sind (Satz (3. 5)).

Unter einem geordneten Graphen A (im weiteren kurz Graph genannt) verstehen wir eine reflexive und symmetrische Relation, die auf einer endlichen Folge

$$S(A)=(a_1, a_2, \dots, a_\alpha) \qquad (\alpha \geqq 1)$$

von verschiedenen — als Punkte bezeichneten — Elementen definiert ist. Das Bestehen der Relation für die Punkte a_i, a_j wird durch das Symbol $a_i \sim a_j$ und durch den Satz „a_i und a_j sind in A mit einer Kante verbunden" ausgedrückt.

Als der durch die Punkte

$$a_{i_1}, \dots, a_{i_m} \qquad (i_1 < i_2 < \dots < i_m, \ m \geqq 1)$$

eines Graphen A gespannte Teilgraph wird derjenige Graph A' bezeichnet, dessen Punktfolge $S(A')=(a_{i_1}, \dots, a_{i_m})$ ist, wobei zwei dieser Punkte dann und nur dann verbunden sind, wenn sie in A verbunden sind.

Jede zu einem Graphen gehörende Relation wird mit demselben Zeichen geschrieben. Es ist jedoch kein Mißverständnis zu befürchten; ist nämlich $a_i \sim a_j$ für zwei Punkte eines in unseren Ausführungen vorkommenden Graphen, so gilt auch für jeden anderen diese Punkte enthaltenden Graphen immer dasselbe. Diesen Umstand ausnützend werden wir ferner den durch die Punkte $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$ gespannten Teilgraphen eines Graphen A ohne Hinweis auf A mit $[a_{i_1}, \dots, a_{i_m}]$ bezeichnen.

$\mathcal{N}(A)$ bedeute die Anzahl der Punkte des Graphen A. Die Graphen A und B werden isomorph genannt (und dies wird mit $A \cong B$ bezeichnet), wenn $\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}(B)$ und — mit der Bezeichnung

$$S(A)=(a_1, \dots, a_\alpha), \qquad S(B)=(b_1, \dots, b_\beta)$$

für jedes Paar i, j

$$a_i \sim a_j \Leftrightarrow b_i \sim b_j$$

besteht.

Ein Graph A wird als *kantenlos* bzw. *vollständig* bezeichnet, wenn $a_i \sim a_j$ nur für $i=j$ bzw. für jedes mögliche Paar i, j besteht.

Das starke Produkt (im weiteren kurz das Produkt) der Graphen A und B wird nun folgendermaßen definiert. Es seien $S(A)=(a_1, \ldots, a_\alpha)$ und $S(B)=(b_1, \ldots b_\beta)$. Die Punkte von $A \times B$ sind dann die geordneten Paare $a_i b_j$ ($i=1, \ldots, \alpha$; $j=1, \ldots, \beta$), u.zw. werden dieselben lexikographisch angeordnet, d.h.

$$S(A \times B)=(a_1 b_1, \ldots, a_1 b_\beta, \ldots, a_\alpha b_1, \ldots, a_\alpha b_\beta).$$

Ferner seien $a_{i_1} b_{j_1}$ und $a_{i_2} b_{j_2}$ dann und nur dann in $A \times B$ verbunden, wenn $a_{i_1} \sim a_{i_2}$ für A und $b_{j_1} \sim b_{j_2}$ für B gilt.

Es ist leicht einzusehen, daß aus $A \cong B$ die Relationen $A \times C \cong B \times C$ und $C \times A \cong C \times B$ folgen (die umgekehrte Implikation wird später bewiesen), und daß $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$ gilt, (d.h. die Multiplikation ist assoziativ). Das Produkt kantenloser bzw. vollständiger Graphen ist offensichtlich kantenlos bzw. vollständig; wird ferner die Reihenfolge zweier kantenlosen oder zweier vollständigen Faktoren eines Produkts umgekehrt, so ist der neue Produktgraph zum ursprünglichen isomorph.

$A|B$ bedeute, daß ein C mit $C \times A \cong B$ existiert. Offensichtlich hat $A|B$ und $B|C$ $A|C$ zur Folge. $A \times B \cong B$ bzw. $B \times A \cong B$ gilt wegen $\mathcal{N}(A \times B)=\mathcal{N}(A)\mathcal{N}(B)$ dann und nur dann, wenn $\mathcal{N}(A)=1$ ist.

Ein Graph A wird irreduzibel genannt, wenn $\mathcal{N}(A)>1$ ist und $B \times C \cong A$ nur bei $\mathcal{N}(B)=1$ oder $\mathcal{N}(C)=1$ bestehen kann.

Als *Primzerlegung* (kurz Zerlegung) eines Graphen A wird jede Folge $A_1, \ldots, A_k$ irreduzibler Graphen mit

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k \cong A$$

bezeichnet.

Ist $\mathcal{N}(A)>1$, so existiert natürlich eine Zerlegung von A. Zwei Zerlegungen $A_1, \ldots, A_k$ und $A_1', \ldots, A_l'$ eines Graphen A nennen wir isomorph, wenn $k=l$ und $A_i \cong A_i'$ $(i=1, \ldots, k)$ sind. Nichtisomorphe Zerlegungen von A werden als verschieden betrachtet.

2.

Vorangehend seien einige einfache Hilfssätze angeführt. Aus den Definitionen folgt unmittelbar:

(2. 1) *Sind* $A \times B \cong T$ *und* $S(A)=(a_1, \ldots, a_\alpha)$, $S(B)=(b_1, \ldots, b_\beta)$, $S(T)=(t_1, \ldots, t_\tau)$, *so gilt* $\alpha\beta=\tau$; *für* $i=g\beta+r$ $(0 \leqq g \leqq \alpha-1,\ 0<r \leqq \beta)$ *ist ferner der i-te Punkt von* $A \times B$ $a_{g+1} b_r$ *und es gelten*

$$[t_\beta, t_{2\beta}, \ldots, t_{\alpha\beta}] \cong A, \tag{1}$$

$$[t_{g\beta+1}, \ldots, t_{g\beta+\beta}] \cong B, \tag{2}$$

wobei (2) *zur folgenden doppelten Behauptung äquivalent ist: für jedes Paar r, s mit* $0<r, s \leqq \beta$ *gilt*

$$t_r \sim t_s \Leftrightarrow b_r \sim b_s, \tag{3}$$

und für je drei Werte i, j, λ mit $0 \leqq g\beta<i, j \leqq (g+1)\beta \leqq \alpha\beta$ *und* $0<i+\lambda\beta, j+\lambda\beta \leqq \alpha\beta$ *gilt*

$$t_i \sim t_j \Leftrightarrow t_{i+\lambda\beta} \sim t_{j+\lambda\beta}. \tag{4}$$