Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 27 (3—4), (1976), 231—242.

SUR LES ANNEAUX PRINCIPAUX

Par

A. BOUVIER (Lyon)

A est un *anneau principal* s'il est commutatif, unitaire et si tous ses idéaux sont des idéaux principaux.

Tout anneau principal, est, de façon unique, produit direct de $k \geqq 0$ anneaux principaux intègres et de $h \geqq 0$ anneaux principaux spéciaux [9]. Le couple (k, h) est appelé *le type de A*.

Au premier paragraphe, nous examinons, pour un anneau principal quelconque, ce qui deviennent quelques propriétés classiques des anneaux principaux intègres: dimensions de Krull, spectre et spectre maximal, atomicité, décomposition des A-modules, représentation de A en sommes sous-directes, recherche des anneaux principaux sous-directement irréductibles, etc. Les résultats sont donnés en fonction du type de l'anneau principal considéré.

Toujours par analogie avec le cas des anneaux intègres, nous étudions, au deuxième paragraphe les modules de torsion sur un anneau principal. Nous donnons un théorème de décomposition de ces modules et nous précisons ce résultat en fonction du type de l'anneau A.

Au dernier paragraphe, nous présentons une généralisation de la notion de module libre sur un anneau intègre: les modules *quasi-libres*. Nous montrons que si M est un module libre sur un anneau principal, A, tous ses sous-modules sont quasi-libres. Nous en déduisons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un anneau de Bezout soit principal, et nous montrons que sur un anneau principal, tout module projectif est quasi-libre.

§ 1. Divisibilite dans les anneaux principaux

Les anneaux considérés sont commutatifs unitaires. Si A est un anneau, on désigne par $\mathcal{U}(A)$ le groupe de ses unités, par $\mathrm{div}(A)$ l'ensemble de ses diviseurs de zéro, $\mathrm{rad}(A)$ son radical de Jacobson, $\mathrm{spec}(A)$ son spectre premier et $\max(A)$ son spectre maximal.

On dit que A est présimplifiable [4] si $\mathrm{div}(A) \subseteqq 1-\mathcal{U}(A)$. On appelle *anneau principal* tout anneau, non nécessairement intègre, dont tout idéal est principal.

On dit que A est un *anneau de Bezout* si la somme de deux idéaux principaux est un idéal principal, (ce qui équivaut à dire que tout idéal de type fini est principal). A est un *anneau de valuation* si l'ensemble de ses idéaux principaux est totalement ordonné par inclusion.

1—1. PROPOSITION. a) *A est un anneau de valuation si et seulement si A est un anneau de Bezout local.*

b) *A est un anneau de valuation n'ayant qu'un nombre fini d'idéaux principaux si et seulement si A est un anneau principal spécial* [9].

DÉMONSTRATION. a) $*$ Si A est un anneau de valuation, A est trivialement un anneau de Bezout. Il est local car si $a, b \notin \mathcal{U}(A)$ et si $a-b \in \mathcal{U}(A)$, $aA+bA=A$ entraine $aA=A$ ou $bA=A$ ce qui est absurde.

$*$ Si A est un anneau de Bezout local, soient a et b deux éléments de A; on peut les supposer non nuls. D'une part, $aA+bA=kA$; donc $k=a\alpha+b\beta$. Mais $a=ka'$ et $b=kb'$ donc $k=ka'\alpha+kb'\beta$. Or $k\neq p$ et A local est présimplifiable ([4] 1—1). On a donc $a'\alpha+b'\beta=u\in\mathcal{U}(A)$.

D'autre part, A est local; donc

$$a'\alpha+b'\beta\in\mathcal{U}(A) \Rightarrow a'\in\mathcal{U}(A) \text{ ou } b'\in\mathcal{U}(A)$$

alors $aA\subseteq kA$ ou $bA\subseteq kA$ soit $bA\subseteq aA$ ou $aA\subseteq bA$.

b) La condition est évidemment suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Soit I un idéal de A; $I=\sum_{x\in A} xA$. Puisque A est un anneau de Bezout et ne possède qu'un nombre fini d'idéaux principaux, I est un idéal principal. Donc A est principal. Puisque A n'a qu'un nombre fini d'idéaux, A est principal spécial.

1—2. LEMME ([4] 4—3). *Tout anneau principal est, de façon unique, produit direct fini d'anneaux principaux présimplifiables.*

Puisque tout anneau principal est de façon unique produit direct fini d'anneaux principaux présimplifiables, on peut parler de la décomposition canonique d'un anneau principal en produit direct d'anneaux principaux présimplifiables, qui sont des anneaux intègres ou des anneaux principaux spéciaux. *Dans ce qui suit, on considère toujours un corps comme un anneau principal spécial et non pas comme un anneau principal intègre.*

Soit A un anneau principal; A est produit direct (de façon unique) de k anneaux principaux intègres et de h anneaux principaux spéciaux. Le couple (k, h) est appellé *le type de l'anneau principal A.*

1—3. PROPOSITION. *Si S-est-une partie multiplicative d'un anneau principal A de type (k, h) $S^{-1}A$ est un anneau principal de type (k', h') avec $k'\leqq k$ et $h'\leqq h+(k-k')$.*

DÉMONSTRATION. Si $A=\prod_{i=1}^{n} A_i$, $S^{-1}A$ peut se mettre sous la forme $\prod_{i=1}^{n} S_i^{-1}A_i$. Si A_i est intègre, $S_i^{-1}A_i$ est intègre ou un corps. Si A_i est principal spécial, il n'a que deux anneaux de fractions: A_i et 0. Notre assertion en découle immédiatement.

1—4. PROPOSITION. *La dimension de Krull d'un anneau principal A est $\leqq 1$; A est de dimension 1 si et seulement s'il est de type (k, h) avec $k\geqq 1$.*

DÉMONSTRATION. La dimension d'un produit direct d'anneaux est le maximum des dimensions de ses facteurs; tout anneau principal intègre est de dimension 1 [6] et tout anneau principal spécial est de dimension nulle.

1—5. PROPOSITION. *Pour un anneau A, les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *A est principal de type $(0, h)$.*

(ii) *A est principal artinien.*

(iii) *Tout A-module est somme directe de A-modules indécomposables.*