Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 27 (3—4), (1976), 263—265.

EINE FOLGE POSITIVER INTERPOLATIONSOPERATOREN

Von
H.-B. KNOOP (Duisburg)

Gegeben seien zwei kompakte Intervalle $K=[a, b]$ und $J=[c, d]$ sowie m paarweise verschiedene Punkte $x_1, \dots, x_m$ in K und m Funktionen $h_k \in \mathscr{C}_{\mathbf{R}}(J)$, $k=1, \dots, m$. (Mit $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(K)$ bzw. $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(J)$ bezeichnen wir den Banach-Raum der reellwertigen, auf K bzw. J definierten, stetigen Funktionen unter der Čebyšev-Norm.) Dann wird ein Interpolationsoperator $L_m: \mathscr{C}_{\mathbf{R}}(K) \to \mathscr{C}_{\mathbf{R}}(J)$ definiert durch

$$(L_m f)(x) = \sum_{k=1}^{m} h_k(x) f(x_k)$$

(vgl. R. A. DEVORE [1]). Sind die Funktionen h_k nichtnegativ, so entsteht ein positiver linearer Operator L_m. Für $K=J=[-1, 1]$ erhalten wir z. B. einen positiven Interpolationsoperator, wenn $x_1, \dots, x_m$ die Nullstellen des Jacobi-Polynoms $J_m^{(\alpha,\beta)}$ mit $-1<\alpha\leqq 0$, $-1<\beta\leqq 0$ sind, und wenn $L_m f$ das eindeutig bestimmte Hermite—Fejér-Polynom vom Grad $\leqq 2m-1$ ist, für welches gilt:

$$(L_m f)(x_k) = f(x_k), \quad (L_m f)'(x_k) = 0 \quad (k = 1, \dots, m)$$

(vgl. I. P. NATANSON [3]).

Wir wollen nun zu bestimmten Knoten $x_1, \dots, x_m$ im Intervall $K=J=[-1, 1]$ *den* Interpolationsoperator L_m auf Positivität untersuchen, der dadurch entsteht, daß jedem $f \in \mathscr{C}_{\mathbf{R}}(K)$ das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad $\leqq 4m-1$ mit

$$\text{(1)} \qquad (L_m f)(x_k) = f(x_k), \quad (L_m f)^{(n)}(x_k) = 0, \quad (k = 1, \dots, m, \quad n = 1, 2, 3)$$

zugeordnet wird. Wie wählen als Knoten $x_1, \dots, x_m$ die Nullstellen des m-ten Čebyšev-Polynoms $T_m(x) = \cos(m \cdot \arccos x)$. Laut M. MÜLLER [2] läßt sich das Polynom $L_m f$ in der Form

$$(L_m f)(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k(x) l_k^4(x) f(x_k)$$

darstellen, wo

$$\text{(2)} \quad a_k(x) = \frac{1}{6(1-x_k^2)^2}\{6(1-x_k x)^2 + [(4m^2-1)(1-x_k x)-3](x-x_k)^2\} \quad (k=1,\dots,m)$$

und l_k das Lagrange-Grundpolynom mit

$$l_k(x) = \frac{T_m(x)}{T_m'(x_k)(x-x_k)}$$

ist. Es ist leicht zu sehen, daß dieser Operator die Eigenschaften (1) erfüllt. Der folgende Satz zeigt, daß der hier konstruierte Interpolationsoperator positiv ist.

SATZ 1. *Sind $x_1, \ldots, x_m$ die Nullstellen des m-ten Čebyšev-Polynoms T_m, so gilt für alle $k=1, \ldots, m$ und alle $x \in K=[-1, 1]$:*

$$a_k(x) \geqq \frac{1}{8}.$$

BEWEIS. Wir betrachten die in (2) auftretenden Funktionen, für die folgende Beziehungen erfüllt sind:

$$(1-x_k x)^2 \geqq (x-x_k)^2 \quad \text{für alle} \quad x \in K,$$
$$(4m^2-1)(1-x_k x)-3 \geqq -3 \quad \text{für alle} \quad x \in K.$$

Damit ist für alle $x \in K$

$$6(1-x_k x)^2+\big((4m^2-1)\cdot(1-x_k x)-3\big)(x-x_k)^2 \geqq 3(1-x_k x)^2,$$

also

$$a_k(x) \geqq \frac{(1-x_k x)^2}{2(1-x_k^2)^2} \geqq \frac{(1-x_k)^2}{2(1-x_k^2)^2} = \frac{(1-x_k)^2}{2(1-x_k)^2(1+x_k)^2} = \frac{1}{2(1+x_k)^2} \geqq \frac{1}{8}.$$

Wir wollen nun die Frage untersuchen, ob für die Folge $(L_m f)_{m \in \mathbf{N}}$ von Interpolationspolynomen gilt:

$$\lim_{m \to \infty} \|f-L_m f\| = 0.$$

Dabei deutet $\|.\|$ die Čebyšev-Norm im Raum $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(K)$ an. Wir benutzen eine allgemeine Aussage über die Konvergenzgüte einer Folge positiver linearer Operatoren von $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(K)$ nach $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(J)$ (siehe R. A. DEVORE [1; S.28]). Danach gilt für alle $f \in \mathscr{C}_{\mathbf{R}}(K)$ und alle $x \in K$:

$$|f(x)-(L_m f)(x)| \leqq 2\omega(f, \alpha_m(x)).$$

Hierbei ist ω: $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(K) \times \mathbf{R}_+^* \ni (f, \delta) \mapsto \omega(f, \delta)$ der Stetigkeitsmodul, $\alpha_m^2(x)= =\big(L_m((\pi_1-x)^2)\big)(x)$ und π_1 die Identität auf K. ($\mathbf{R}_+^*=\{r \in \mathbf{R}; r>0\}$.)

SATZ 2. *Für alle $f \in \mathscr{C}_{\mathbf{R}}(K)$, alle $m \in \mathbf{N}$ und alle $x \in K$ gilt:*

$$|f(x)-(L_m f)(x)| \leqq 2\omega\left(f, |T_m(x)|\left(2m^{-2}+\frac{2}{3}m^{-3}(m^2-1)T_m^2(x)\right)^{1/2}\right).$$

BEWEIS. Bekanntlich läßt sich das Lagrange-Grundpolynom bezüglich der Nullstellen des m-ten Čebyšev-Polynoms T_m in der Form

$$l_k(x) = \frac{(-1)^{k-1}T_m(x)}{m(x-x_k)}(1-x_k^2)^{1/2}$$

darstellen. Damit ist

$$(L_m f)(x) = m^{-4}\sum_{k=1}^{m}\frac{(1-x_k x)^2}{(x-x_k)^4}T_m^4(x)f(x_k)+$$
$$+m^{-4}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{6}\big((4m^2-1)(1-x_k x)-3\big)\frac{T_m^4(x)}{(x-x_k)^2}f(x_k).$$