Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 35 (1—2), (1980), 109—116.

ÜBER APPROXIMATION DURCH POLYNOME MIT BELEGUNGSFUNKTION

Von

J. GRÓF (Veszprém)

§ 1. Einleitung

Außer den Approximationseigenschaften sind auch die engen Beziehungen bekannt, die die Bernsteinsche Operatoren [1]

$$B_n(f;\, x) = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu}$$

zur Binomialverteilung der Wahrscheinlichkeitstheorie binden. Ähnliche Beziehungen findet man z. B. in den Betrachtungen der Operatoren

$$M_n(f;\, x) = (1-x)^{n+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{\nu+n}\right)\binom{n+\nu}{\nu} x^\nu,$$

mit denen man eine im Intervall $[0, 1]$ stetige Funktion f in $[0, a]$ $(a<1)$ gleichmäßig approximieren kann [2], oder z. B. auch im Fall der Gamme-Operatoren [3]

$$G_n(f;\, x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^\infty e^{-xt} t^n f\left(\frac{n}{t}\right) dt.$$

Die M_n sind mit der Pascal-Verteilung, die G_n mit der Gamma-Verteilung verbunden.

Betrachten wir jetzt — ohne diese Parallelität ausführlich darzulegen — die entsprechenden Beziehungen der Poisson-Verteilung zur Approximationstheorie. Mit diesem Problem beschäftigten sich O. SZÁSZ [4], G. M. MIRAKYAN [5] und auch andere Mathematiker. Die Operatoren von SZÁSZ—Mirakyan ordnen einer, im Intervall $[0, \infty)$ gegebenen Funktion f Potenzreihen mit Belegungsfunktion:

$$S_n(f;\, x) = e^{-nx} \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \frac{(nx)^\nu}{\nu!}.$$

In seiner eben zitierten Arbeit prüfte O. Szász die zu den bekannten Approximationseigenschaften der Bernsteinschen Polynome analogen Behauptungen im Fall des Operators S_n.

Die Approximation irgendeiner Funktion durch M_n, G_n bzw. S_n ist im Fall numerischer Rechnungen im allgemeinen problematisch, wegen des Integrals bzw. der unendlichen Reihen. Es scheint also nützlich die Frage zu behandeln (bleiben wir im weiteren beim Operator S_n), ob man nicht statt der unendlichen Reihen mit ihrer Partialsummen rechnen kann. Genauer gesagt, wenn man die folgende Bezeichnung einführt:

$$S_{n,N}(f;\, x) = e^{-nx} \sum_{\nu=0}^{N} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \frac{(nx)^\nu}{\nu!},$$

so lautet unsere Frage: Welche Approximationseigenschaften des Operators S_n beliben auch für $S_{n,N}$ gültig, und wie muß man dann N angeben? Ferner: ist es nicht möglich, in einem beliebigen Punkt bzw. beliebig langen Intervall der reellen Achse auch solche Funktionen durch $S_{n,N}$ beliebig genau zu approximieren bzw. gleichmäßig zu approximieren, für welche die Transformation S_n gar nicht erklärt ist. Diese Fragen wollen wir in der vorliegenden Arbeit beantworten.

§ 2. Sätze 1—3.

O. SZÁSZ bewies in [4]; „Ist $f(x)$ eine, in allen endlichen Intervallen beshränkte Funktion, und gilt $f(x)=O(x^k)$ $(k>0, x\to\infty)$, ferner, ist $f(x)$ stetig an der Stelle x_0, so gilt die Behauptung: $\lim_{n\to\infty} S_n(f;\, x_0)=f(x_0)$." Unsere obige Frage lautet also: Ist dieser Satz auch für $S_{n,N}$ gültig, wenn N in geeigneter Weise angegeben wird? Die Frage können wir positiv beantworten, wir werden aber viel mehr beweisen: statt der Klasse der Funktionen, die durch die Bedingung $f(x)=O(x^k)$ zugelassen werden, können wir eine viel breitere Klasse angeben, deren Funktionen durch $S_{n,N}$ approximiert werden können. Vor der genauen Formulierung unserer Behauptung betrachten wir z. B. die Funktion $f(x)=e^{x^k}$, wobei $k>0$ ist. Für diese Funktion lautet die Transformation S_n:

$$S_n(e^{t^k};\, x) = e^{-nx} \sum_{\nu=0}^{\infty} \exp\left[\left(\frac{\nu}{n}\right)^k\right] \frac{(nx)^\nu}{\nu!}.$$

Bezeichnen wir das allgemeine Glied der unendlichen Reihe mit $a_{n,\nu}(x)$, so bekommt man durch Anwendung der Stirling-Formel die asymptotische Gleichung:

$$a_{n,\nu}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \exp\left[\left(\frac{\nu}{n}\right)^k + \nu\ln(nx) - \nu\ln\nu + \nu\right] \quad (\nu\to\infty),$$

aus der sich ergibt, daß für $k>1$ die Reihe für beliebige fixe $x>0$, $n>0$ divergent ist. Die Funktion $f(x)=e^{x^k}$ $(k>1)$ wird also für keinen positiven Wert von x durch S_n approximiert. Laut des nachstehenden Satzes kann aber diese Funktion, sogar für beliebige $x>0$, durch $S_{n,N}$ approximiert werden.

SATZ 1. (A) *Es sei f in allen (in $[0,\infty)$ liegenden) endlichen Intervallen beschränkt und $f(x)=O(g_m(x))$ $(x\to\infty$, $m\geqq 1$ ganze Zahl), mit*

$$g_0(x) = x; \quad g_i(x) = \exp[g_{i-1}(x)] \quad (i \geqq 1);$$

es sei ferner $N=N(n)$ so angegeben, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n} = \infty$$

gilt, wobei aber eine Schwellenzahl n_0 existiert, derart, daß für $n>n_0$ die Bedingung $N(n)\leqq nh_{m-1}(n)$ mit $h_0(x)=x$; $h_i(x)=\ln[h_{i-1}(x)]$ $(i\geqq 1)$ erfüllt ist. Dann gilt die folgende Behauptung für jede nicht-negative Stelle x_0, wo f stetig ist:

$$\lim_{n\to\infty} S_{n,N}(f;\, x_0) = f(x_0).$$