EINE NEUE CHARAKTERISIERUNG FINSLERSCHER RÄUME SKALARER UND KONSTANTER KRÜMMUNG UND PROJEKTIV-EBENE RÄUME

Von

A. RAPCSÁK (Debrecen)

(*Vorgelegt von* O. VARGA)

Einführung

Bekanntlich ist ein Riemannscher Raum dann und nur dann von konstanter Krümmung, falls in ihm in einem beliebigen Punkt durch jede hindurchgehende Richtung eine Ebene gelegt werden kann.

Wollen wir spezielle Finslersche Räume auf eine ähnliche Weise charakterisieren, dann müssen wir vor allem eine Definition der Ebene angeben. Für den Fall transversaler Flächen hat bereits WEGENER[1] Ebenen definiert und gezeigt, daß in einem Finslerschen Raum in jedem Punkt in jeder Richtung eine Ebene gelegt werden kann, falls der Raum von verschwindender Krümmung ist.

In der vorliegenden Arbeit definieren wir Ebenen als Flächen, welche als geometrischer Ort tangentialer Linienelemente betrachtet werden können. Unter diesen Bedingungen gibt es dreierlei natürliche Definitionen der Ebene. Die Ebenen erster Art sind die totalgeodätischen Flächen, diejenigen zweiter Art, oder O. Vargasche Ebenen, sind die totalquasigeodätischen Flächen, und diejenigen dritter Art sind Ebenen, auf welchen die Normalvektoren im Sinne der Metrik des Raumes parallel sind.

Unsere Arbeit enthält drei Hauptsätze. Hauptsatz I besagt, daß in einem Finslerschen Raum zu jedem Linienelement in jeder orthogonalen Richtung dann und nur dann eine Ebene erster Art gelegt werden kann, falls derselbe projektiv-ebener und von skalarer Krümmung ist.[2]

Nach dem Hauptsatz II kann in einem Finslerschen Raum dann und nur dann zu jedem Linienelement in jeder orthogonalen Richtung eine O. Vargasche Ebene gelegt werden, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) Der Raum ist ein projektiv-ebener Finslerscher Raum skalarer Krümmung;

[1] Siehe M. WEGENER [11], S. 122.

[2] Siehe L. BERWALD [1], S. 176.

2) $A_{\alpha\beta\gamma|0} = 0$.

Endlich ist nach dem Hauptsatz III dafür, daß in einem Finslerschen Raum zu jedem Linienelement in jeder orthogonalen Richtung eine Ebene dritter Art gelegt werden kann, notwendig und hinreichend, daß der Raum ein Riemannscher Raum konstanter Krümmung ist.

Sämtliche in unserer Arbeit auftretende Größen werden als regulär-analytisch vorausgesetzt.

§ 1. Der Finslersche Raum skalarer Krümmung

Wie bekannt, ist ein Finslerscher Raum F_n eine n-dimensionale Punktmenge, für welche das „Bogenelement" durch die Funktion

$$ds = L(y, dy) \tag{1.1}$$

gegeben wird. Die Funktion L ist in dy^α positiv homogen ersten Grades, und führt zu einem regulären Variationsproblem.

CARTAN[3] hat statt des n-dimensionalen Punktraumes einen $(2n-1)$-dimensionalen Linienelementenraum $(y^1, \dots, y^n, v^1, \dots, v^n)$ eingeführt, in welchem also jede Größe in einem Linienelement definiert ist. Der Maßtensor ist durch

$$g_{\alpha\beta}(y, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} \text{ [4]} \tag{1.2}$$

bestimmt.

Die Länge eines Vektors $\xi^\alpha(y, v)$ bzw. der Cosinus des Winkels zwischen zwei, in demselben Linienelement definierten Vektoren $\xi^\alpha(y, v)$, $\eta^\alpha(y, v)$ wird durch die Gleichungen

$$\xi = +\sqrt{\xi_\alpha \xi^\alpha}, \tag{1.3}$$

$$\cos(\xi, \eta) = \frac{\xi_\alpha \eta^\alpha}{\sqrt{\xi_\beta \xi^\beta}\sqrt{\eta_\beta \eta^\beta}} \tag{1.4}$$

definiert.

Für das invariante Differential des Finslerschen Raumes haben wir[5]

$$D\xi^\alpha = d\xi^\alpha + \left(A^\alpha_{\beta\gamma}\,\omega^\gamma + \Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma} dy^\gamma\right)\xi^\beta, \tag{1.5a}$$

$$D\xi_\alpha = d\xi_\alpha - \left(A^\beta_{\alpha\gamma}\omega^\gamma + \Gamma^{*\beta}_{\alpha\gamma} dy^\gamma\right)\xi_\beta, \tag{1.5b}$$

[3] Siehe E. Cartan [2].

[4] Die griechischen Indizes laufen von 1 bis n, die lateinischen von 1 bis $(n-1)$!

[5] Für das folgende siehe z. B. E. CARTAN [2].