EIN ELEMENTARGEOMETRISCHER BEWEIS VON H. A. SCHWARZ VEREINFACHT UND UNABHÄNGIG VOM PARALLELENAXIOM GEFÜHRT

Von
PAUL SZÁSZ (Budapest)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

Herrn Professor LEOPOLD FEJÉR *zugeeignet*

Unter allen einem spitzwinkligen geradlinigen Dreieck ABC eingeschriebenen geradlinigen Dreiecken hat das Dreieck der Höhenfußpunkte den kleinsten Umfang.

Für diesen Satz von G. F. FAGNANO, der ihn mittels Differentialrechnung gefunden hat,[1] sind zwei, wesentlich verschiedene elementargeometrische Beweise bekannt geworden. Der eine ist der Beweis von H. A. SCHWARZ,[2] der andere rührt von L. FEJÉR[3] her. Ein besonderer Vorzug des Fejérschen Beweises ist, daß er auch in der hyperbolischen Geometrie gültig bleibt, in der der Schwarzsche versagt.[4] Die Bedeutung des Schwarzschen Beweises besteht andererseits darin, daß er einer Verallgemeinerung für gewisse konvexe Polygone fähig ist.

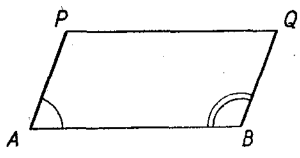
Ich erlaube mir in dieser Note einen dritten elementargeometrischen Beweis des oben stehenden Satzes vorzulegen. Er ist eine Vereinfachung des

[1] Vgl. M. ZACHARIAS, Elementargeometrie und elementare nichteuklidische Geometrie in synthetischer Behandlung, *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, III AB 9, S. 983.

[2] H. A. SCHWARZ, Beweis des Satzes, daß unter allen einem spitzwinkligen Dreiecke eingeschriebenen Dreiecken das Dreieck der Höhenfußpunkte den kleinsten Umfang hat, *Gesammelte mathematische Abhandlungen. II* (Berlin, 1890), S. 344—345.

[3] Siehe H. RADEMACHER und O. TOEPLITZ, *Von Zahlen und Figuren* (Berlin, 1933), 2. Aufl., S. 23—26 und 168.

[4] Der Beweis von L. FEJÉR gilt sogar auch für sphärische Dreiecke. Ich bemerke aber, daß für die hyperbolische Ebene auch der Beweis von H. A. SCHWARZ leicht gerettet werden kann, nämlich auf Grund des folgenden Satzes der hyperbolischen Elementargeometrie:



Liegen die Strecken $\overline{AP}=\overline{BQ}$ auf ein und derselben Seite von der Geraden AB und ist $\sphericalangle BAP$ das Supplement von $\sphericalangle ABQ$, so ist $\overline{AB}<\overline{PQ}$.

Schwarzschen Beweises, insofern ich nur von den zwei ersten Spiegelungen von H. A. SCHWARZ Gebrauch mache, und er behält seine Gültigkeit auch in der hyperbolischen Geometrie, da doch bei dieser Beweisführung nur solche elementargeometrische Sätze zur Verwendung kommen, die vom Parallelenaxiom unabhängig sind.

Diese Beweisart ist im Grunde genommen nicht neu, sie war nach dem Vorgange von J. PETERSEN[5] schon von A. ADLER[6] in seinem Buche angedeutet worden. Neu ist aber, soviel ich weiß, daß hier der Beweis *unabhängig vom Parallelenaxiom* geführt wird.

Anschließend beweise ich noch den verwandten Satz von R. STURM[7] über recht- oder stumpfwinklige Dreiecke, ebenfalls unabhängig vom Parallelenaxiom.

*

Den Grund des angekündigten Beweises bildet der folgende einfache

HILFSSATZ. *Liegen die Strecken* $\overline{AP}=\overline{BQ}$ *auf verschiedenen Seiten von der Geraden* AB *und ist* $\sphericalangle BAP$ *das Supplement von* $\sphericalangle ABQ$, *so ist* $\overline{AB}<\overline{PQ}$.

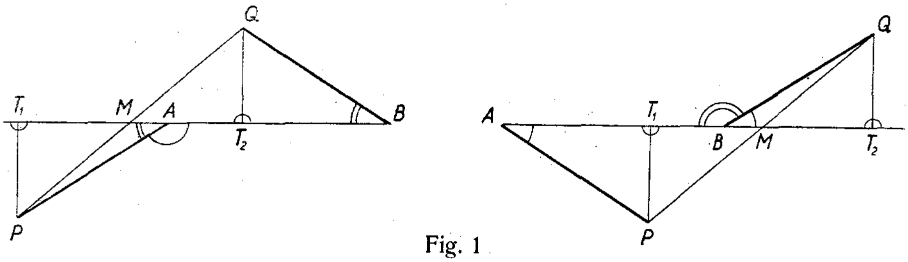


Fig. 1

Um das einzusehen, seien auf AB von P bzw. Q aus die Lote $\overline{PT_1}$ bzw. $\overline{QT_2}$ gefällt. Ist $\sphericalangle BAP$ eventuell ein rechter Winkel, so ist auf Grund der Voraussetzung auch $\sphericalangle ABQ$ ein rechter, also fällt dann T_1 mit A und T_2 mit B zusammen. Im Gegenfall ist immer noch $\overline{AB}=\overline{T_1T_2}$. Das sieht man so ein. Infolge der Voraussetzung ist $\sphericalangle T_1AP=\sphericalangle T_2BQ$ (Fig. 1), also sind wegen $\overline{AP}=\overline{BQ}$ die rechtwinkligen Dreiecke PAT_1 und QBT_2 kongruent und deshalb ist $\overline{AT_1}=\overline{BT_2}$. Da weiter diese Strecken auch gleichsinnig sind, so ist $\overline{AB}=\overline{T_1T_2}$, wie behauptet wurde. Weil aber P und Q auf verschiedenen

[5] J. PETERSEN, *Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Constructionsaufgaben* (Kopenhagen, 1879), S. 66—67, Aufgabe 340.

[6] A. ADLER, *Theorie der geometrischen Konstruktionen* (Leipzig, 1906), S. 33—34, Aufgaben 62, 63.

[7] R. STURM, Bemerkungen und Zusätze zu Steiners Aufsätzen über Maximum und Minimum, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **96** (1884), S. 36—77, insbesondere S. 64 - 65.